Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik I (Analysis)

1. Klausur SoSe 2001 Hamburg, 17.07.2001

Aufgabe 1 (8 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Konvergenz. Geben Sie falls möglich den Grenzwert an oder andernfalls die Häufungspunkte:

$$a_n = \frac{4n^4 + 3n}{n^3 + 1} - \frac{8n + 3}{2}$$

b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern diese existieren:

b1) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)(x^3 - e^x)}{3x^2 + 12x + 12}$ ohne Benutzung der Regel von de l'Hospital

b2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^3}{e^{1-x^2} - x^2}$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 + x$.

a) Berechnen und vereinfachen Sie $\varphi(\Delta x) := \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

b) Berechnen Sie unter Angabe aller Einzelschritte $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$.

c) Welche Bezeichnung ist für $\varphi(\Delta x)$ üblich? Wie heißt der unter b) berechnete Grenzwert und welche Bedeutung hat dieser für die Funktion f?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Extremstellen und klassifizieren Sie die Extrema der Funktion

$$f : [0; 2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 2x^3 + x^2 + 1\,.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{x}\, dx\,.$$

b) Es sei $\Phi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t^{a-2} - 1}{t^a}\, dt\,.$

b1) Scheiben Sie für $a \geq 2$ die Integralfunktion $\Phi(x)$ ohne Integralzeichen.

b2) Berechnen Sie $g(a) := \lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x)$ für $a \geq 2$.

b3) Weisen Sie nach, daß g für $a \geq 2$ streng monoton wachsend ist und berechnen Sie $\lim\limits_{a \to \infty} g(a)$.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' + \frac{3}{2} y + 2x = 0\,.$$

a) Klassifizieren Sie diese Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie deren allgemeine Lösung.

c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit der Eigenschaft $y(0) = \frac{8}{9}$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob die folgende Funktion homogen ist und bestimmen Sie ggf. den Homogenitätsgrad.

$$f(x,y,z) = xyz + 2xy - 3xz + yz$$

b) Konstruieren Sie den Term einer homogenen Funktion mit drei unabhängigen Variablen und dem Homogenitätsgrad 1.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Für die Produktion eines Wirtschaftsgutes setzt ein Fabrikant zwei Produktionsfaktoren ein. Der Output x hängt von dem Inputpaar (r_1, r_2) dieser Faktoren gemäß der Produktionsfunktion

$$x(r_1, r_2) = 5 \cdot r_1^{0.3} r_2^{0.7}$$

ab.

a) Berechnen Sie den Output x für das Inputpaar $(30, 20)$.

b) Bilden Sie das totale Differential dx. In der Produktionstheorie wird es als totales Grenzprodukt bezeichnet.

c) Berechnen Sie das totale Grenzprodukt für das Inputpaar aus a), wenn r_1 um 0.2 Einheiten vermindert und r_2 um 0.3 Einheiten vermehrt wird. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem exakten Änderungswert.

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Bestimmen Sie grad $f(\boldsymbol{x})$ für die Funktion

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\sin x_1}{\cos x_2} + x_3 e^{x_1^2 + x_3^2} \quad \text{mit } \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 6xy$ und die Nebenbedingung $x + 2y = 4$.
Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrange-Methode alle stationären Stellen von f unter Einhaltung der Nebenbedingung.
Berechnen Sie den Funktionswert von f an den stationären Stellen.