Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik I (Analysis)

1. Klausur SS 2000 Hamburg, 18.07.2000

Name, Vorname:

Adresse:

Geburtsdatum:

Matrikelnummer:

Studienfach, Fachsemester:

Versuche in Mathematik I (bitte ankreuzen):

1.	2.	3.

Unterschrift:

Bitte überprüfen Sie die Klausur zunächst auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 3 Seiten.

Aufgabe	max. Pkt.	err. Pkt.
1	8	
2	4	
3	8	
4	3	
5	7	
6	9	
7	8	
8	5	
9	8	
gesamt	60	

abwesend	
von	bis

Bemerkungen:

Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie den Flächeninhalt, der durch die Graphen der Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = 2x - x^2$ im 1.Quadranten eingeschlossen sind.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:
$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}} dx$

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Das klassische Wachstumsmodell für das Volkseinkommen von *R. H. Harrod (1900-1978)* basiert auf folgenden Beziehungen zwischen den Variablen Volkseinkommen $Y(t)$, der Sparsumme $S(t)$ und der Investition $I(t)$:

$$\begin{aligned} S(t) &= sY(t) \text{ mit } s \in (0,1), \\ I(t) &= aY'(t) \text{ mit } a > 0,\, a \neq s, \\ S(t) &= I(t). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der ersten beiden Gleichungen in die dritte Gleichung erhalten wir eine Differentialgleichung 1.Ordnung:

$$Y'(t) = \frac{s}{a} Y(t).$$

Im Jahr 1980 betrug das Volkseinkommen der Bundesrepublik Deutschland $1,15$ Billionen DM. Wie groß ist das Volkeinkommen in diesem Modell im Jahr 2000?
Für welche Werte von $s \in (0,1)$ und $a > 0$, $a \neq s$, nimmt das Volkseinkommen in t zu?

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Warum ist $y(x) = |x|$ keine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$?

Aufgabe 5 **(7 Punkte)**

Ermitteln Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes die stationären Stellen der Funktion $f(x,y,z) = -5x^2 + 4y^2 + 3z^2$ unter den Nebenbedingungen $x + y = 3$ und $y + z = 4$.

Aufgabe 6 **(9 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion

$$f : [-2;2] \to IR, f(x) = \frac{10 - e^{x^2}}{x^2 + 1}$$

1. Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie.
2. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema auf dem Definitionsintervall. Benutzen Sie hierfür nur die 1.Ableitung.

Aufgabe 7 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern diese existieren:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

b) $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 8x^2 + 16x}{x^3 - 9x^2 + 24x - 16}$

c) $\lim_{x \to \infty} \left(x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} \right)$

d) $\lim_{x \to \infty} \left(x \left(1 - \cos \dfrac{1}{x} \right) \right)$

Aufgabe 8 **(5 Punkte)**

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern diese existieren:

1. $\lim_{x \to \infty} \left(x \cos \dfrac{1}{x} \right)$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{2 \left(e^x - 1 \right)}{x \left(1 - x \right)}$
3. Bestimmen Sie $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3 \left| x^3 \right| - 2 \left| x^2 \right| + 1}{2 + 2x^3}$ ohne Benutzung der Regel von l'Hospital.

Aufgabe 9 **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $x \left(r_1, r_2 \right) = 20 \cdot r_1^{0{,}6} \cdot r_2^{0{,}4}$.

a) Berechnen Sie $x \left(500, 700 \right)$.

b) Bestimmen Sie $grad\, x \left(r_1, r_2 \right)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des totalen Differentials dx in 1.Näherung die Änderung von $x \left(500, 700 \right)$, wenn r_1 um 1 verkleinert und r_2 um 2 vergrößert wird.

d) Vergleichen Sie das Ergebnis in c) mit dem exakten Änderungswert.