

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen

Teilklausur Mathematik II (Lineare Algebra)

1. Klausur SS 99

Hamburg, 20.07.1999

A Lineare Gleichungssysteme

(11 Punkte)

1 Für die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems gelte

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 17 \end{array} \right).$$

1. Zeigen Sie unter Nutzung des Ranges, daß das lineare Gleichungssystem lösbar ist.
2. Begründen Sie, wieso es keine eindeutige Lösung geben kann!

2 Gegeben seien die beiden Vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Welche Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ lösen das Gleichungssystem

$$2\mathbf{x} + 4\mathbf{y} = \mathbf{v} \quad \wedge \quad 3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = \mathbf{w} \quad ?$$

B Vektorräume und lineare Abhängigkeit

(16 Punkte)

1 Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie einen dritten Vektor \mathbf{c} an, so daß $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ und $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ jeweils linear unabhängig sind, die Menge $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ aber linear abhängig ist.

2 Sei $\mathbf{a}^T = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$. Zeigen Sie, daß alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ mit $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = 0$ einen Vektorraum V bilden. Bestimmen Sie eine Basis von V und seine Dimension.

3 Unter welcher Bedingung für $z \in \mathbb{R}$ sind die folgenden drei Vektoren des \mathbb{R}^3 linear abhängig?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} z \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Welchen Rang hat die von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und \mathbf{v}_3 gebildete Matrix in diesen Fällen?

C Matrizen

(16 Punkte)

1 Gegeben sei die Matrixgleichung $\mathbf{A} - \mathbf{XB} + \mathbf{AX} = \mathbf{C}$ sowie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Läßt sich die Matrixgleichung formal nach \mathbf{X} auflösen? Begründung!
2. Bestimmen Sie \mathbf{X} gegebenenfalls ohne formale Auflösung der obigen Gleichung.

2 Zeigen Sie für die Determinante einer (3,3)-Matrix

$$\mathbf{A} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} :$$

”Sind die beiden ersten Spaltenvektoren linear abhängig, d.h. es gilt $\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_2$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so hat die Determinante den Wert 0.”

3 Seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c+1 & 0 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -c & 0 & 2 \\ 0 & -c & 0 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix} .$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ gilt:

- a) $\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.
- b) $\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A} + \mathbf{B})$
- c) $\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\mathbf{B})$

D Lineare Optimierung

(17 Punkte)

1 Es sei folgendes System von Ungleichungen gegeben:

$$x + y \geq 5, \quad x \leq 3, \quad y \leq 2, \quad 2x + y \leq 6$$

Die Zielfunktion $Z(x, y) = x + y$ soll maximiert werden.

1. Bestimmen Sie graphisch die Menge der zulässigen Lösungen.
2. Wie lautet die optimale Lösung, wenn man die letzte Bedingung $2x + y \leq 6$ fallen läßt?

2 Ein Transportflugzeug mit einer Ladefläche von $40 t$ und einer Laderaumkapazität von $100 m^3$ soll die Güter A und B laden.

	A	B
Gewicht in t	1	0.2
benötigtes Volumen in m^3	1	1

Von Gut A stehen maximal 30 Einheiten und von Gut B maximal 300 Einheiten zur Verfügung. Für den Gewinn aus dem Transportflug gilt:

$$G(x_A, x_B) = 480x_A + 80x_B - 7000.$$

Ermitteln Sie die Mengen x_A und x_B , so daß ein maximaler Gewinn erzielt wird und geben Sie den zugehörigen Gewinn an.