Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik II (Lineare Algebra)

2. Klausur WS 2000/2001 Hamburg, 29.03.2001

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}^T = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das Matrizenprodukt $\boldsymbol{v}^T\mathbf{A}\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}^T\mathbf{B}\boldsymbol{v}$.
(Dieses Matrizenprodukt heißt *quadratische Form*)

b) Welche Beziehung besteht zwischen den Matrizenelementen a_{ii} und b_{ii} sowie für $i \neq j$ zwischen den Summen $a_{ij} + a_{ji}$ und $b_{ij} + b_{ji}$?

c) Geben Sie eine weitere Matrix $\mathbf{C}$ an, welche die gleiche quadratische Form erzeugt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Matrix $\mathbf{A}$ heißt *Projektor*, wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ und $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$. Man zeige, daß für eine (n,p)-Matrix $\mathbf{X}$ mit $\text{Rang}(\mathbf{X}) = p$ die Matrix $\mathbf{A} := \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T$ ein *Projektor* ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A}(\lambda))$.
Für welche Werte von λ bilden die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}(\lambda)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

b) Zeigen Sie, daß andernfalls der von den Spaltenvektoren von $\mathbf{A}(\lambda)$ erzeugte Vektorraum ein dreidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 sind nur als Grundmischungen M_1, M_2, M_3, M_4 mit verschiedenen Anteilsverhältnissen $r_1 : r_2 : r_3$ lieferbar. Fassen wir diese Zahlen zu Vektoren $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}^T$ zusammen, so sind die vier lieferbaren Grundmischungen durch

$$\boldsymbol{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{m}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{m}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gekennzeichnet.

a) Wie müssen die Grundmischungen zusammengeführt bzw. die Vektoren $\boldsymbol{m}_i, i = 1,2,3,4$ kombiniert werden, damit daraus eine Mischung mit dem Rohstoffverhältnis

$$r_1 : r_2 : r_3 = 5 : 7 : 5$$

entsteht? Geben Sie alle möglichen Kombinationen an.
Beachten Sie, daß nur positive Mengen von $M_i, i = 1,2,3,4$ verwendet werden können.

b) Läßt sich durch Kombination der $\boldsymbol{m}_i, i = 1,2,3,4$ jedes Rohstoffverhältnis $r_1 : r_2 : r_3$ erzeugen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Gegeben sei der Vektorraum

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \; x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge gerade V ist.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Mengen von Vektoren der $\mathbb{R}^2$:

$$V_1 = \left\{ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ a_2 \end{pmatrix}, \; a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$V_2 = \left\{ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Stellen Sie beide Mengen durch Wahl geeigneter Repräsentanten graphisch dar.

b) Untersuchen und begründen Sie, ob und warum V_1 und V_2 Vektorräume sind.
Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ein Vektorraum? Falls ja, bestimmen Sie die Dimension und geben sie eine Basis an!

Aufgabe 8 (12 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 3x_2 & \to & \text{max!} \\ x_1 & \leq & 6 \\ x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 18 \\ x_1, \; x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Führen Sie den ersten Schritt des Simplexverfahren durch und überprüfen Sie, ob die erhaltene Lösung optimal ist.

b) Geben Sie für die folgenden Basisvariablen-Kombinationen die zugehörige Basislösung an, sofern sie existiert, und überprüfen Sie die Basislösung auf Zulässigkeit. Ist die Basislösung zulässig, berechnen Sie den Zielfunktionswert.

b_1) (x_1, x_2, u_2)

b_2) (x_1, u_1, u_2)

b_3) (x_1, u_1, u_3)

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = 3x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 12x - 4y - 2z \; .$$

a) Weisen Sie nach: f besitzt genau eine stationäre Stelle $(x_0 \; y_0 \; z_0)$, d.h. $(x_0 \; y_0 \; z_0)$ mit:

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 6x_0 - 12, & 2(y_0 - 1) - 4, & 2z_0 - 2 \end{pmatrix} = (0 \; 0 \; 0).$$

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f und deren Hauptminoren.

c) Entscheiden Sie mit Hilfe der Definitheit der Hesse-Matrix, ob $f(x_0, y_0, z_0)$ ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist.
Berechnen Sie den Funktionswert an dieser Stelle.