

# Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen

## Teilklausur Mathematik II (Lineare Algebra)

1. Klausur SS 2000

Hamburg, 18.07.2000

Name, Vorname:

Adresse:

Geburtsdatum:

Matrikelnummer:

Studienfach, Fachsemester:

Versuche in Mathematik II (bitte ankreuzen):

1.	2.	3.
----	----	----

Unterschrift:

Bitte überprüfen Sie die Klausur zunächst auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 4 Seiten.

Aufgabe	max. Pkt.	err. Pkt.
1	10	
2	3	
3	7	
4	12	
5	12	
6	4	
7	6	
8	6	
gesamt	60	

abwesend	
von	bis

Bemerkungen:

**Aufgabe 1****(10 Punkte)**

Bestimmen Sie für die folgenden Gleichungen die Matrix  $X$ . Dabei sind  $A, B, C$  und  $X$  ( $n \times n$ ) –Matrizen,  $A$  und  $B$  sind nicht singulär.

a)  $A \cdot X \cdot B = C \cdot B$

b)  $A \cdot (X + B) = B \cdot X$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 2****(3 Punkte)**

Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ , d.h.  $A$  besitzt  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten. Weiterhin sei bekannt, daß  $m > n$  und  $\text{Rang}(A) = n$ .

Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

- Die Spalten von  $A$  sind linear unabhängig.
- Die Spalten von  $A$  sind eine Basis des  $\mathbb{R}^m$ .
- Die Zeilen von  $A$  sind ein Erzeugendensystem des  $\mathbb{R}^n$ .
- Das Gleichungssystem  $A \cdot x = b$  ist für alle  $b \in \mathbb{R}^m$  lösbar.
- Die inverse Matrix  $A^{-1}$  existiert.

Eine Begründung ist nicht notwendig!

**Aufgabe 3****(7 Punkte)**

Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems  $A \cdot x = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie  $A^{-1}$ .
- Lösen Sie das lineare Gleichungssystem  $A \cdot x = b$ .

**Aufgabe 4****(12 Punkte)**

Eine Druckerei druckt Kataloge ( $x$ ) und Bildbände ( $y$ ). Hierzu werden Facharbeiter und Maschinenkapazität benötigt.

Die gesamte zur Verfügung stehende Maschinenkapazität beträgt 10000 Stunden, für 10 Kataloge wird 1 Stunde und für 10 Bildbände werden 2,5 Stunden der Maschinenkapazität benötigt.

Die Kapazität an Facharbeiterstunden beträgt ebenfalls 10000 Stunden. Für die Herstellung von 10 Katalogen muss ein Facharbeiter 2 Stunden und für die Herstellung von 10 Bildbänden 1 Stunde arbeiten.

Weiterhin sei angenommen, daß maximal 40000 Kataloge abgesetzt werden können.

Das Unternehmen will seinen Gewinn maximieren, der Gewinn lautet:  $G(x, y) = 5x + 2y - 50000$

- Berechnen Sie mit dem Simplex-Algorithmus die optimale Menge an Katalogen und

Bildbänden und den zugehörigen Gewinn.

- b. Handelt es sich bei der Menge der zulässigen Lösungen um einen Vektorraum? (Begründung!)

### Aufgabe 5

(12 Punkte)

Gegeben seien zwei stationäre Punkte  $P_1 = (1.5, 1, 0.25)$  und  $P_2 = (1, 1, 0)$  einer Funktion  $y = f(x_1, x_2, x_3)$ , d.h. es gilt:

$$\text{grad}(f(1.5, 1, 0.25)) = 0 \quad \text{und} \quad \text{grad}(f(1, 1, 0)) = 0$$

Für die Hesse-Matrix von  $f$  gelte:

$$\text{Hess}(f(1.5, 1, 0.25)) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{Hess}(f(1, 1, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie mit Hilfe der Definitheit der Hesse-Matrix, welcher der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  gegebenenfalls ein lokales Maximum bzw. Minimum von  $f$  ist!

Hinweis:

$(\text{grad}(f(x)) = 0 \wedge \text{Hess}(f(x)) \text{ positiv definit}) \Rightarrow f$  hat in  $x$  ein lokales Minimum

$(\text{grad}(f(x)) = 0 \wedge \text{Hess}(f(x)) \text{ negativ definit}) \Rightarrow f$  hat in  $x$  ein lokales Maximum

$(\text{grad}(f(x)) = 0 \wedge \text{Hess}(f(x)) \text{ indefinit}) \Rightarrow f$  hat in  $x$  kein lokales Extremum

### Aufgabe 6

(4 Punkte)

Gegeben sei die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

- a. Welche Dimension besitzt der von  $M$  erzeugte Vektorraum  $\text{span}(M)$ ?  
b. Geben Sie eine Basis von  $\text{span}(M)$  an, die keinen Vektor aus  $M$  enthält!

### Aufgabe 7

(6 Punkte)

Entscheiden Sie (mit Begründung!), welche der Mengen ein reeller Vektorraum ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis und die Dimension.

- a.  $V = \left\{ (w, x, y, z)^T \mid x^2 - y^2 = 0; w, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$   
b.  $V = \left\{ (a, b, c)^T \mid a - 3 - c = a + b - 3; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

### Aufgabe 8

(6 Punkte)

Es seien vier Vektoren  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^3$  gegeben. Für diese Vektoren gelten die folgenden Zusammenhänge:

- (i)  $a_1 + a_2 = 3a_3$   
(ii)  $a_1 \neq \lambda a_3, \quad \lambda \in \mathbb{R}$   
(iii)  $\lambda a_1 + \mu a_3 \neq a_4, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Beantworten Sie die folgenden Fragen (mit kurzer Begründung):

- a. Bilden die Vektoren  $a_1, a_2$  und  $a_3$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ ?
- b. Bilden die Vektoren  $a_1, a_3$  und  $a_4$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ ?
- c. Welche Dimension hat der durch die Vektoren  $a_1, a_2$  und  $a_3$  aufgespannte Vektorraum?
- d. Sind die Vektoren  $a_1, a_2, a_3$  und  $a_4$  linear abhängig?